UNA INTRODUCCION ELEMENTAL A LAS FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARITMICA

por

JAVIER LAFUENTE LÓPEZ

Es conocida la dificultad que existe de introducir a un nivel elemental —de 3.º de BUP o COU— las funciones exponencial y logarítmica. Un planteamiento riguroso del tema requiere inevitablemente conceptos y resultados pertenecientes al análisis superior, que, en principio, no están dentro del nivel permisible.

La exposición sobre este tema que se presenta a continuación, y que pretende servir como posible solución a la dificultad antes apuntada, es, además, un ejemplo de cómo la utilización de un potente resultado (en nuestro caso, la existencia y unicidad de soluciones en **R** para la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = y\Big)$$

cuyo contenido intuitivo es abordable a un nivel dado de conocimientos —aunque no así su demostración— puede simplificar, en algunas ocasiones, notablemente las cosas.

FUNCION EXPONENCIAL Y LOGARITMICA

1. INTRODUCCIÓN.

Se plantea la cuestión de si existe alguna función $F : R \to R$, tal que su derivada coincida con ella misma, es decir, $F = F'$. Hay una respuesta trivial a esta cuestión: la función constante $F = O$ verifica este requisito, pero ¿existe alguna otra respuesta? Desde luego ninguna función constante, aparte de la idénticamente nula, nos puede servir, ya que su derivada F' es igual a cero. Tampoco merece la pena intentarlo con las funciones F polinómicas de grado $n \geqslant 1$, pues como es sabido,

su derivada F′, tiene grado $n - 1$ (y por tanto $F \neq F'$). No obstante, si ensayamos con una función F de la forma

$$F(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

(suma de infinitos términos) y derivamos «formalmente», se tendría:

$$F'(x) = 1 + 2 \cdot \frac{x}{2} + 3 \cdot \frac{x^2}{2 \cdot 3} + 4 \cdot \frac{x^3}{2 \cdot 3 \cdot 4} +$$

$$+ \ldots + n \cdot \frac{x^{n-1}}{n!} + \ldots = F(x)$$

¿hemos encontrado entonces una respuesta no trivial a la cuestión? Sí y no.

a) No, porque a nivel elemental se desconoce lo que significa una suma de infinitos términos, y aunque no fuera así, porque hemos utilizado una regla, en principio aplicable sólo a las funciones polinómicas (la de derivación de polinomios) a una función que ciertamente no lo es.

b) Sí, porque ésta es una de las soluciones que proporciona el análisis superior, después de haber salvado las dificultades anteriores.

Se puede también tratar de dar una respuesta gráfica a la cuestión antes planteada, de la forma que se indica en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 1: Trazar, sobre un papel milimetrado, unos ejes rectangulares OXY, y construir un arco de poligonal que, pasando por el punto (0,1), esté formado por segmentos AB de longitud $d = 0{,}5$ cm y con pendiente igual a la ordenada en el punto A.

Se comprende que este arco de poligonal se aproxima a la gráfica de una hipotética función F, tal que $F = F'$ y tanto más cuanto más pequeño sea d. Por otra parte, si se impone al arco poligonal anterior que pase por $O = (O, O)$, es fácil percatarse de que lo que así se obtiene es la gráfica de la función constante $F = O$.

Al lector que haya realizado (aunque sólo sea mentalmente) el ejercicio anterior no debe sorprenderle ninguna de las afirmaciones contenidas en el siguiente teorema.

Teorema 1

a) Existe una *única* función $E : R \to R$, tal que $E(O) = 1$ y $E' = E$.

b) Si F es una función tal que $F' = F$ y $F(O) = O$, necesariamente F es la función constante nula.

Se reservará, en adelante, la letra E para designar la función a que hace referencia el apartado *a*) y se denominará función exponencial.

La demostración rigurosa del teorema exige técnicas que están muy

por encima del nivel que nos podemos permitir, aunque en esencia no muy alejadas de la sugerida en el ejercicio 1. De cualquier forma, daremos por válido el teorema y sobre él edificaremos una original exposición sobre la teoría de las funciones exponencial y logarítmica, abordable desde un punto de vista elemental.

2. La función exponencial E.

En primer lugar, vamos a tratar de mejorar el resultado del teorema 1.

Teorema 2.

Dado un número k cualquiera, existe una *única* función $F : R \to R$, tal que $F' = F$ y $F(0) = k$.

Demostración:

Si $k = 0$, el teorema se transforma en la segunda afirmación de teorema 1.

Si $k \neq 0$, considérese la función $F(x) = k \cdot E(x)$. Como $F'(x) = k \cdot E'(x) = k \cdot E(x) = F(x)$ y $F(0) = k \cdot E(0) = k \cdot 1 = k$, F es la función buscada. ¿Puede existir otra función *distinta*, digamos G, que verifique $G' = G$ y $G(0) = k$? Imposible, pues la función G/k coincidiría con su derivada y toma valor 1 para $x = 0$; por el teorema 1, $G/k = E$ y por tanto $G = k \cdot E = F$.

El teorema 2 nos proporciona todas las posibles respuestas a la cuestión planteada al principio, es decir, las funciones $F : R \to R$, tales que $F' = F$ son todas de la forma $F = k \cdot E$, siendo k un número real.

A continuación se van a enumerar (y demostrar) algunas propiedades de gran interés para la función exponencial E.

Propiedad 1: Si a y x son números reales cualesquiera $E(a + x) = E(a) \cdot E(x)$.

Demostración:

Se fija el número real a, y se tratará de demostrar la igualdad entre las funciones $F(x) = E(a + x)$ y $G(x) = E(a) \cdot E(x)$, para ello es suficiente observar que $F(0) = E(a) = G(0)$ y que $F'(x) = E'(a + x) = E(a + x) = F(x)$; $G'(x) = E(a) \cdot E'(x) = E(a) \cdot E(x) = G(x)$ y aplicar el teorema 2.

Propiedad 2: $E(x) \neq 0$ para todo $x \in R$.

Demostración:

$E(x) \cdot E(-x) = E(x + (-x)) = E(0) = 1$, por tanto, $E(x) \neq 0$ y $E(-x) \neq 0$.

Propiedad 3: $E(x) > 0$ para todo $x \in R$.

Demostración:

$E(x) = E(x/2 + x/2) = E(x/2) \cdot E(x/2) = (E(x/2))^2 \geqslant 0$, pero $E(x)$ es distinto de cero, luego $E(x) > 0$.

Propiedad 4: La función exponencial E es estrictamente creciente.

Demostración:

Obsérvese simplemente que $E'(x) = E(x) > 0$ para todo $x \in R$.

Propiedad 5: El número $\varepsilon = E(1)$ es estrictamente mayor que 1.

Demostración:

Por ser E función estrictamente creciente y $0 < 1$ es $1 = E(0) < E(1) = \varepsilon$.

Propiedad 6: $E(n) = \varepsilon^n$ para $n \in N$.

Demostración:

$E(1) = \varepsilon^1$, $E(2) = E(1 + 1) = E(1) \cdot E(1) = \varepsilon^2$, $E(3) = E(2 + 1) = E(2) \cdot E(1) = \varepsilon^2 \cdot \varepsilon = \varepsilon^3, \ldots$, etc.

Propiedad 7: $\lim\limits_{x \to +\infty} E(x) = +\infty$.

Demostración:

La sucesión $x_n = E(n) = \varepsilon^n$ tiene por límite $+\infty$ ya que $\varepsilon > 1$ y si x es un número comprendido entre los naturales n y $n + 1$ es $E(n) = \varepsilon^n < E(x) \leqslant \varepsilon^{n+1}$ por la monotonía de E. Se comprende entonces que $E(x)$ se «va» a $+\infty$ con la sucesión ε^n, cuando x se hace arbitrariamente grande.

Propiedad 8: $\lim\limits_{x \to -\infty} E(x) = 0$

Demostración:

$$\lim_{x \to -\infty} E(x) = \lim_{x \to +\infty} E(-x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{E(x)} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{x \to +\infty} E(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Ejercicio 2: Hacer una representación gráfica de la función exponencial $y = E(x)$, utilizando las técnicas habituales (asíntotas, concavidad y convexidad, ..., etc.) y compruébese (sobre el dibujo) que E es una aplicación biyectiva de R en R^*_+.

La propiedad 6 justifica, en parte, el por qué se ha dado a E el nombre de función exponencial. La siguiente proposición da una justificación completa.

Proposición 1

Si r es número racional cualquiera, entonces $E(r) = \varepsilon^r$.

Demostración:

Puede hacerse en cuatro fases, dos de las cuales se dejan como ejercicio.

1) Si $n \in N$ es $E(n) = \varepsilon^n$ (propiedad 6).

2) Si $q \in N^*$ es $E(1/q) = \sqrt[q]{\varepsilon} = \varepsilon^{1/q}$. Sugerencia: Pruébese que $(E(1/q))^q = \varepsilon$.

3) Si $p \in N$ y $q \in N^*$ es $E(p/q) = \sqrt[q]{\varepsilon^p} = \varepsilon^{p/q}$. Sugerencia: Pruébese que $(E(p/q))^q = \varepsilon^p$.

4) Demostrar el teorema: $r > 0$, corresponde a la fase 3; si $r < 0$ es $-r > 0$ y entonces

$$E(r) = \frac{1}{E(-r)} = \frac{1}{\varepsilon^{-r}} = \varepsilon^r$$

La proposición 1 nos permite escribir con cierta garantía la igualdad $E(x) = \varepsilon^x$ para todo $x \in R$, de esta manera la propiedad 1 expresa una propiedad «natural»: $\varepsilon^{x+a} = \varepsilon^x \cdot \varepsilon^a$ seguramente conocida por el lector, cuando x y a son números racionales.

Pero, ¿quién es ese número $\varepsilon = E(1)$? Seguramente es un número importante. Los lectores que hayan realizado el ejercicio 1 pueden comprobar que se trata de un número comprendido entre 2 y 3, más cerca de 3 que de 2, quizás 2,7... En el siguiente parágrafo se comprobará que ε es precisamente el número e; recuérdese que este número es el límite de la sucesión $(1 + 1/n)^n$.

Ejercicio 3.

La función

$$F(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

(suma de infinitos términos), propuesta en el parágrafo 1, si existiera, tendría que coincidir con la función exponencial E (obsérvese que $F(0) = 1$) y $F(1) = E(1)$ sería aproximadamente igual a

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$

Realícese esta operación con una calculadora, y compruébese que el resultado es muy aproximado al número e.

3. La función logarítmica.

En el ejercicio 2 se muestra que la función exponencial $E : R \to R^*_+$ es una aplicación biyectiva, y por tanto admite una función inversa $E^{-1} : R^*_+ \to R$ que se designará por la letra L ($E^{-1} = L$) y que se llama función logarítmica. Obsérvese que para $a > 0$, $L(a) = b \iff E(b) = a$. Las propiedades de la función logarítmica L quedan sintetizadas en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 4.

Pruébense las propiedades siguientes:

1) $L(1) = 0$ y $L(\varepsilon) = 1$.
2) Si $a, b \in R^*_+$ es $L(a \cdot b) = L(a) + L(b)$ y $L(a/b) = L(a) - L(b)$.

3) Si $a \in R^*_+$ y $r \in Q$ es $L(a^r) = r \cdot L(a)$.
4) $\lim\limits_{x \to +\infty} L(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0+} L(x) = -\infty$
5) La función L es continua.

DERIVADA DE LA FUNCION LOGARITMICA

La función inversa de $y = L(x)$ es $x = E(y)$, derivando, por la regla de la cadena, ambos miembros de la última igualdad, respecto de x (¡$y = L(x)$!) queda

$$1 = \frac{dE}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = E(y) \cdot \frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{dy}{dx}$$

luego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \text{ y } L'(x) = \frac{1}{x} \text{ para } x > 0$$

Ejercicio 5.

Hágase una representación gráfica de la función logarítmica $y = L(x)$.

Se probará, finalmente, que el número ε coincide con el número e: La derivada de la función logarítmica en el punto $x = 1$ es, por lo anterior,

$$L'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

Si se calcula esta derivada, utilizando la definición queda

$$1 = \lim_{h \to 0} \frac{L(1 + h) - L(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{L(1 + h)}{h}$$

tomando $h = 1/n$ ($n \in N$) se tiene

$$1 = \lim_{n \to \infty} \frac{L(1 + 1/n)}{1/n} = \lim_{n \to \infty} n \cdot L(1 + 1/n) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} L((1 + 1/n)^n) = L(\lim_{n \to \infty} (1 + 1/n)^n)$$

(la última igualdad es consecuencia de la continuidad de la función logarítmica L en el punto de abscisa $x = 1$), pero

$$e = \lim_{n \to \infty} (1 + 1/n)^n$$

luego $L(e) = L(\varepsilon) = 1$ y por ser L inyectiva es $\varepsilon = e$. La función exponencial puede escribirse ahora de la forma $E(x) = e^x$.

Los siguientes ejercicios completarán la teoría que acabamos de iniciar.

Ejercicio 6.

Compruébese que para $a > 0$ la función $F(x) = e^{xL(a)}$ es una definición satisfactoria de a^x, es decir, $F(r) = a^r$ para todo r número racional.

Ejercicio 7.

Tomando como definición de a^x la igualdad $a^x = e^{xL(a)}$ (para $a > 0$) probar:

a) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.
b) $(a^x)^y = a^{xy}$.
c) $(ab)^x = a^x \cdot b^x$ $(b > 0)$.
d) $L(a^x) = x \cdot L(a)$.

Ejercicio 8.

Comprobar que para $a > 0$, $a \neq 1$ y $x > 0$ la definición

$$\log_a x = \frac{L(x)}{L(a)}$$

es satisfactoria, es decir, se verifica la equivalencia: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$ (la función $\log_a$ se denomina logaritmo en base a, y es la función inversa de la función exponencial a^x).

Ejercicio 9.

Si a es un número positivo y distinto de 1, pruébese:

1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$ para $x > 0$, $y > 0$.
2) $\log_a(x^b) = b \log_a(x)$ para $x > 0$.

Ejercicio 10.

Calcular la derivada de las funciones $y = a^x$, $y = \log_a x$ $(1 \neq a > 0)$.