LA OBRA MATEMATICA DE BERTRAND RUSSELL (1872 - 1970)

por

JOSÉ JAVIER ETAYO

El pasado día 3 de febrero falleció en su tierra natal de Gales el filósofo y matemático Bertrand Russell. Con este motivo, las Asociaciones de Catedráticos y de Profesores Agregados de Enseñanza Media de Vizcaya, han organizado un ciclo de conferencias de homenaje al extinto, en las que se estudien los distintos aspectos de su obra. La conferencia relativa al aspecto matemático nos fue benévolamente encargada, y las líneas que siguen recogen los párrafos más significativos de la misma.

La postura primera, ingenua, ante la obra matemática de Bertrand Russell suele, en general, constar de dos componentes: la de considerar que es un filósofo que ha escrito sobre matemáticas y la de atribuirle el carácter de demoledor de la teoría de Cantor. Pero cuando nos adentramos en sus escritos, es cuando, con respecto a esta última, se percibe el reconocimiento explícito de su dependencia de la obra cantoriana; y en cuanto a lo primero, no se olvide que en 1893 fue graduado en Matemáticas del Trinity College de Cambridge, en el que había ingresado a los 18 años, y miembro del mismo en 1895.

Lo que sí es cierto es que toda su obra científica, al menos matemática, en que se ha basado su reputación, fue elaborada en los siguientes quince años. En 1910 comienza la edición de los *Principia Mathematica,* y acaso el esfuerzo puesto en la realización de esta obra mengua su capacidad para seguir por ese camino. El dice: «A partir de entonces, he sido claramente menos capaz para ahondar en abstracciones difíciles». Acaba ahí propiamente, antes de los cuarenta años, el Russell académico y científico y da paso al sociólogo y apóstol de la paz.

De aquella primera etapa señalemos, cronológicamente, sus obras matemáticas o relacionadas con la matemática, ya que ésta es siempre mirada desde el prisma de la filosofía y de la lógica: *An essay on the Foundations of Geometry*, 1897; *The principles of Mathematics*, 1903; *Les paradoxes de la logique*, «Rev. Metaph. et Morale», 1906, pp. 627-650; *Mathematical logic as based on the theory of types*, «Am. J. of Math.», 30, 1908, pp. 222-262; *Principia Mathematica*, en colaboración con A. N. Whitehead, en tres volúmenes, que aparecieron en 1910, 1912 y 1913. Posteriormente puede citarse todavía una conferencia, *Scientific method in philosophy*, 1914, y un curso profesado ese mismo año sobre *Our knowledge of the external world as a field for scientific method in philpsophy*. Finalmente, en 1919 publica *Introduction to Mathematical Philisophy*, que viene a ser una presentación a menor nivel de los *Principia*, con una elegancia y una belleza literaria en la exposición que la hace verdaderamente digna del Premio Nobel de Literatura que le fue concedido en 1950. «Resulta un placer —dice Dorward— volver a la bella prosa inglesa de Russell después de haber estado forcejeando con el lenguaje de muchos filósofos que, aun cuando tengan algo de verdadero valor que decir, parecen incapaces de expresarlo si no es en estilo oscuro y retorcido».

Si hemos de analizar, siquiera someramente, la contribución, más esclarecedora que creadora, de Russell a la matemática, forzosamente hemos de contemplar el panorama que a su aparición le es dable ver. Y este panorama es extraordinariamente crítico Las crisis en matemáticas son, en sus inicios, terriblemente alarmantes: la doctrina segura y exacta que mantiene el edificio se resquebraja y parece que todo se hunde; se pierde la fe en algo que parecía intangible. A la postre, resultan sumamente beneficiosas: aquellos cimientos son estudiados y comprendidos y reforzados y, finalmente, sostienen un edificio mucho mayor.

Para entonces ha pasado ya la crisis del análisis. Toda la orgía de resultados nacidos al calor de la creación y de la potencia del cálculo infinitesimal, sin atender cuidadosamente a lo que en la base del mismo había, tuvieron que ser purgados drásticamente. El siglo XIX es el siglo del rigor en el análisis: en él se llega a la evolución del concepto de número mucho más lejos, lo que antes hubiera parecido increíble, que en la evolución del concepto de espacio en la geometría. Esta evolución del espacio es lo que plantea la crisis de la geometría, cuyos coletazos cogen de lleno a Russell y le hacen adscribirse a una de las concepciones, como en seguida veremos. Y ya en la linde de los dos siglos —y justamente él contribuye poderosamente a ello— surge la gran crisis de los fundamentos, la que hace dudar, casi, de toda la matemática.

¿En qué consiste la crisis de la geometría? La geometría era el modelo perfecto y acabado de lo que tiene que ser una ciencia lógico-deductiva. Cada una de sus proposiciones se derivaba, siguiendo un proceso lógico de demostración, de otra proposición anterior. Continuando en escala ascendente se debía llegar a unas primeras proposiciones, admitidas como ciertas, de las que todo lo demás era producto de la deducción lógica. Esas primeras proposiciones son los axiomas, y Euclides inaugura así el método axiomático. La verdad de una proposición estriba en que no se haya cometido ningún error en la cadena de silogismos que desde los axiomas conducen hasta ella. La verdad es aquí, pues, simplemente la coherencia lógica interna de todo el sistema.

Pero ¿qué puede decirse de la verdad de los axiomas? Los axiomas no pueden derivarse por demostración de ninguna otra proposición: han de ser admitidos como ciertos sin demostración; *como ciertos,* dentro de lo que aquí significa verdad: coherencia interna. Del hecho de que se admitían como verdaderos sin demostración se pasó a pensar que eran tan verdaderos, tan evidentes, que no requerían demostración. Ciertamente que Euclides se preocupó de que sus axiomas se ajustasen a observaciones del espacio físico. Si entonces los axiomas son también verdaderos en el sentido de su adecuación al espacio físico, resultará que todo lo que se deduzca lógicamente de ellos, es decir, toda la geometría euclídea, representará un conjunto de leyes del mismo espacio físico. La geometría euclídea es así, la que nos describe el Universo; sus leyes son, para Kant, juicios *a priori.* Cualquier otra geometría nacida de otros axiomas será falsa; tendríamos que decir que sería falsa desde el punto de vista de su adecuación al espacio del Universo. Pero los términos ya se confunden: se piensa que será falsa, incluso en su coherencia interna.

Esta geometría que llenaba de griega armonía todo el universo mental durante más de veinte siglos, sufre un duro palmetazo al comprobarse que con otros axiomas distintos de los de Euclides se puede construir geometrías diferentes, las que se llamaron no-euclídeas, que en punto a coherencia interna nada dejan que desear a la euclídea. Esto produce una revolución copernicana en cuanto al entendimiento del espacio y de la geometría. Ya no se puede confundir coherencia con adecuación a la realidad. Un espacio matemático, el espacio de una geometría, no tiene por qué ser la representación ideal del espacio físico. Pero se sigue pensando que es el espacio euclídeo el que ciertamente se acopla al del Universo.

A esta idea se apunta también Russell: el espacio que represente al mundo físico ha de ser euclídeo, tri-dimensional y homogéneo, es decir, de curvatura constante. Sigue kantiano, bien que en otras ocasiones se opone diametralmente a Kant, pero con una variación: las intuiciones a *priori* van a ser las de la geometría proyectiva; el argumento fundamental es que ésta opera con relaciones cualitativas, las cuales deben preceder a las relaciones cuantitativas de la geometría euclídea y de las no-euclídeas.

Por otra parte, tanto una como las otras pueden obtenerse como subgeometrías de la geometría proyectiva. El siglo XIX es el siglo de la geometría proyectiva. «La geometría proyectiva es toda la geometría», dirá Cayley. «Sic transit gloria mundi», no tenemos más remedio que decir nosotros, si miramos el panorama actual de la geometría.

Parece que fue la geometría la que despertó la vocación de Russell. El mismo lo confiesa así cuando refiere su encuentro con la geometría de Euclides en las enseñanzas que su hermano le impartía a los once años: «Este fue uno de los grandes acontecimientos de mi vida, tan deslumbrante como el primer amor. No me había figurado que existiera algo tan delicioso en el mundo. Después de aprender la quinta proposición, mi hermano me dijo que generalmente se la consideraba difícil, pero yo no había encontrado la menor dificultad. Fue la primera vez que sospeché que podía tener cierta inteligencia. Desde entonces hasta que Whitehead y yo terminamos los *Principia Mathematica,* cuando contaba treinta y ocho años, las matemáticas fueron mi principal interés y mi mayor fuente de felicidad».

En el punto antes anotado parece haberse detenido la aportación de Russell a la geometría de su tiempo. Las cosas fueron evolucionando muy aprisa. El espacio de la relatividad general resultaba ser, en contra de lo sostenido por él, tetra-dimensional, no-euclídeo y de curvatura no constante. Con eso la geometría se desentiende de adaptar sus espacios a la Naturaleza: deja la física y se pasa a la matemática. Construye sus espacios sin otra preocupación que la verdad geométrica; la elección de los espacios convenientes para ser adaptados a la verdad física es ya labor del físico. Por otra parte, la geometría cualitativa ya no es la proyectiva, sino que nace la topología y sobre esta cualitatividad tiene páginas bellamente escritas otro estilista de la matemática: Poincaré.

Pero la aportación fundamental de Russell a la matemática se sitúa en el terreno de la lógica. Difícilmente son para él separables las dos disciplinas, al grado en que habían llegado en su tiempo. «Las dos se han desarrollado en los tiempos modernos: la lógica se ha hecho más matemática y las matemáticas se han hecho más lógicas. De donde resulta que es ahora absolutamente imposible trazar una línea de separación entre ellas; de hecho son una misma cosa.»

Con esa herramienta va a atacar el estudio de los fundamentos de la matemática. A partir de la aritmetización del análisis, a que antes hemos aludido, se ha cimentado en los números reales todo el cuerpo de la matemática; el esfuerzo de autores como Dedekind, Cantor y Peano intenta establecer esta fundamentación en el sistema más sencillo de los números naturales; al demostrar que éstos pueden ser definidos en términos de la teoría de conjuntos, pasa ésta a ser la base de toda la matemática; y todavía esta teoría ha pasado a ser derivada, por parte de Russell, del cálculo proposicional de la lógica. En este punto entran en juego las llamadas paradojas del infinito y del continuo, en realidad una transcripción en términos de ciencia moderna de clásicas paradojas griegas. Estas paradojas, que muestran la no consistencia del cimiento conjuntista, producen la famosa crisis de los fundamentos que los matemáticos de la época intentan superar.

Célebre entre ellas es la conocida por *antinomia de Russell*, aparecida en 1903, aunque Zermelo asegura haberla encontrado antes de esa fecha, independientemente de Russell, y comunicado a Hilbert. Intentemos explicar de un modo, si no riguroso, al menos elemental, en qué consiste esa paradoja.

Se refiere a los conjuntos que no son elementos de sí mismos. Se comprenderá con algún ejemplo: el conjunto de todas las ideas es, a su vez, una idea y, por tanto un elemento de sí mismo; el conjunto de todos los sistemas de estrellas es un sistema de estrellas; el conjunto de todos los conjuntos es un conjunto; pero, en cambio, el conjunto de todos los hombres no es un hombre, y lo mismo el conjunto de todos los libros, etc. Vamos a clasificar, entonces, los conjuntos en dos clases: la clase S, formada por todos los conjuntos que son elementos de sí mismos, y la clase N, formada por los que no son elementos de sí mismos. Esto es ciertamente una clasificación, es decir, se puede ver que todo conjunto o bien es de S o bien es de N, pero no puede ser a la vez de S y de N, es decir, no puede ocurrir que un conjunto sea a la vez elemento de sí mismo y no sea elemento de sí mismo.

Entonces podemos asegurar la veracidad del siguiente enunciado: «Un conjunto C es un elemento de N si, y solamente si, C no es un elemento de C». Es decir, si C no es un elemento de sí mismo, es que pertenece al conjunto N formado por todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos, y recíprocamente. Ahora bien, a su vez N es también un conjunto, luego puede aplicársele el enunciado anterior y nos encontraríamos con la siguiente paradoja: «El conjunto N es un elemento de N si y sólo si N no es un elemento de N».

Esta paradoja, enviada por su autor a Frege, que estaba también buscando fundamentar la matemática sobre bases lógicas, justamente cuando iba a publicar el segundo volumen de su obra, a los diez años de editado el primero, le hizo terminarlo con esta confesión: «Difícilmente puede encontrar un sabio nada más indeseable que ver derrumbarse los fundamentos de su obra cuando acaba de terminarla. En esta situación me ha puesto una carta de M. Bertrand Russell ahora que esta obra iba a salir de la imprenta.»

Las paradojas hacen comprender que algo hay en la teoría que necesita ser aclarado y purificado. En la búsqueda de los nuevos fundamentos se dividen los matemáticos en distintas escuelas que alcanzan su período álgido en los primeros treinta años del siglo, pero que continúan todavía en su indagación e incluso en su partidismo.

Una de esas escuelas es el *formalismo,* encabezado por Hilbert, cuya herencia ha recogido en la actualidad el grupo Bourbaki. Este formalismo busca edificar toda la matemática sobre un sistema fundamental de axiomas. Se desinteresa de qué cosas sean los conjuntos y sus elementos, que define por unas determinadas relaciones, los axiomas, que eliminan las situaciones patológicas de las paradojas. Hace falta comprobar que el sistema es no contradictorio; para muchos de ellos se ha conseguido demostrar que una contradicción implicaría una contradicción en los axiomas de la aritmética; ahora se trataría de demostrar que estos axiomas de la aritmética son, a su vez, no contradictorios.

El *intuicionismo*, por el contrario, del que Brouwer es el máximo representante, no quiere renunciar a la intuición directa de los conceptos matemáticos; para él ningún concepto matemático es aceptable si no puede ser construido. Para eliminar las paradojas en los conjuntos sólo considera el de los números naturales o cualquier otro que se pueda definir mediante una ley que permita obtener tantos elementos del conjunto como se desee. Pero si esta construcción ha de ser efectiva, comportará un número finito de operaciones, o al menos no superior a la potencia de los naturales; con ello ya no podemos hablar siquiera de los números reales. Esta consecuencia de hacer desaparecer una parte enorme de resultados obtenidos por la matemática clásica hace que, pese a su indudable belleza lógica, vaya perdiendo valor, pero junto con las otras escuelas, siempre tendrá el mérito de haber abierto nuevos caminos en la búsqueda de métodos y de haber obligado a perfilar las razones para depositar nuestra confianza en la matemática.

Hemos dejado para el final la escuela de Russell, el *logicismo*, cuyo programa es reducir las matemáticas a la lógica simbólica. El modo ideado para evitar las contradicciones es la teoría de los *tipos* que no ha dado, al parecer, resultados totalmente satisfactorios. Russell observa que en todas las paradojas que se han planteado, y algunas las estudia bien minuciosamente, no todas las entidades lógicas que se manejan son de la misma jerarquía. Cuando se utiliza la palabra *todo* en un cierto conjunto de objetos, no es del mismo tipo que los objetos mismos. La apariencia de contradicción surge en las que él llama *falacias de círculo vicioso*, por la utilización de palabras lógicas que poseen sistemáticamente ambigüedad: todo, verdad, falsedad, función, propiedad, clase, relación, cardinal, ordinal, nombre, definición...

¿Cómo haríamos una exposición elemental de la teoría de los tipos lógicos? El mismo Russell la ilustra con bien escogidos ejemplos, alguno tan clásico como el del cretense mentiroso. Análogo sería el del conocido tópico: «No hay regla sin excepción» Nadie parece dudar de que cuando enunciamos esa frase estamos en realidad dando también una regla. Ahora bien, si fuese cierto que no hay regla sin excepción, la regla que dice que no hay regla sin excepción sería verdadera, y, entonces, sería una regla sin excepción; luego si es cierto que no hay regla sin excepción, entonces es falso que no hay regla sin excepción. La explicación, en el sentir de Russell, es que estamos jugando con tipos distintos de reglas: unas reglas, las que podíamos llamar de tipo u orden 1, operan sobre los objetos de un determinado conjunto; las de orden 2 operarían sobre las reglas anteriores, y así sería la antes enunciada. Se tienen así distintas categorías de reglas, de tal forma que las de una cierta categoría son reglas que se refieren a las reglas de la categoría inmediatamente inferior. En ese mismo sentido, el número de todos los números es un número de un nuevo tipo; el conjunto de todos los conjuntos es un nuevo tipo de conjunto. El tipo lógico es así el dominio de validez de una función proposicional.

Elegantemente aplica nuestro Rey Pastor la teoría de los tipos a las distintas jerarquías del lenguaje, desde un lenguaje ingenuo o primario, al de primer orden que puede emitir juicios sobre la verdad o falsedad del lenguaje primario; la verdad o falsedad de los juicios emitidos por ese lenguaje de primer orden exige un grado superior de refinamiento lógico, expresado en lenguaje de segundo orden, etc. «Más de un caso he tropezado en la vida —dice— en que un embustero pasaba por veraz ante los ingenuos, porque era embustero de segundo orden, y en un círculo de embusteros vulgares mentía diciendo la verdad.» Y cuenta la anécdota del médico sospechoso de haber envenenado a su esposa con arsénico: «Es obvio —declaró— que un graduado en Medicina no cometería la insensatez de recurrir al arsénico, cuyo fácil reconocimiento está al alcance de un mozo de laboratorio, habiendo tantos medios de matar sin rastro.» Pero de coartadas de este tipo, utilizando lenguajes de ordenes superiores, están llenas, por lo menos, las novelas policíacas.

Ligada con la teoría de los tipos está la de las descripciones, de la cual puede también darse una explicación divulgatoria. Para su autor, esta teoría es de la mayor importancia tanto para la lógica como para la teoría del conocimiento, pero para fines matemáticos, la parte más filosófica no es esencial.

¿Qué puede decirse, después de esto, de la fundamentación de la matemática a través de la lógica? Parece que sería preciso extender desmesuradamente la lógica y reivindicar la evidencia para muchas reglas no demasiado extraídas de reflexiones lógicas. El mismo Russell renuncia a caracterizar expresamente las proposiciones lógicas sino como *tautologías*, las cuales él mismo reconoce que no sabe cómo definirlas, pues ninguna definición le ha satisfecho plenamente, aunque siente claramente cómo debe ser esa definición. Dice a este respecto: «La importancia de la tautología para una definición de la matemática me fue señalada por mi ex alumno Ludwig Wittgenstein, quien trabajó ocupándose del problema. Yo no sé si lo ha resuelto ni aun si está vivo o muerto.»

Por otra parte aparecen axiomas, como el del infinito y el de elección, manifiestamente rebeldes a este criterio. Y en cuanto al axioma de irreductibilidad de Russell, que permite alcanzar la teoría de los números reales evitando las paradojas, entienden algunos que ni la intuición lo procura ni la experiencia lo recomienda. Su mismo colaborador Whitehead dice de esa teoría que «nuestro modo de entender es el absurdo», y Weyl, que es intuicionista, opina: «Russell da como última solución, para salir de apuros, que la razón se haga el harakiri.»

Pese a todas las críticas es evidente que la obra de Russell, que él no ha tenido inconveniente en revisar y modificar en sucesivas ediciones, ha servido, como la de los demás estudiosos de la fundamentación matemática, para aclarar las bases de nuestra ciencia, para revisar y reorganizar las de la lógica simbólica, cuya algebraización perseguida por Tarski sea acaso la dirección más notable seguida hasta ahora, y, sobre todo, porque los avances conseguidos con este estudio superan con creces las dificultades y las dudas que el primer planteamiento pudo provocar.

Este pequeño resumen, carente de profundidad por ausencia de especialización en estas materias de quien lo ha escrito, sobre las directrices matemáticas de su obra, querríamos terminarlo, en descargo de esa incompetencia, y salvando por supuesto las distancias, con una cita textual del mismo Russell : «Para cubrir un campo tan amplio ha sido imposible adquirir un conocimiento exhaustivo de toda la literatura. Seguramente que hay muchos trabajos importantes que no conozco, pero donde el trabajo de pensar y escribir absorbe necesariamente tanto tiempo, tal ignorancia, aunque lamentable, no parece ser completamente imperdonable.»

BIBLIOGRAFIA

Además de las obras de Bertrand Russell, antes citadas, se han consultado también :

J. CAVAILLÈS.—*Philosophie mathématique,* Hermann, París 1962.

J. CAVAILLÈS.—*Le problème du fondement des mathématiques,* Hermann, París 1938.

H. EVES.—*An introduction to the History of Mathematics,* Holt, Rinehart, Winston 1964.

E. P. NORTHROP.—*Fantaisies et paradoxes mathématiques,* Dunod. París. 1961.

J. REY PASTOR.—*Algebra del lenguaje,* Real Academia Española. Madrid 1954.

W. STROBL.—*La realidad científica y su crítica filosófica.* Universidad de Navarra, 1966.